Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_2 = b_1 q = 2q$ și $b_3 = b_1 q^2 = 2q^2$, unde q este rația progresiei geometrice $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$	**2p**
	$q^2 - 4q + 4 = 0$, deci $q = 2$	**3p**
2.	$A\left(f(1),1\right)$ aparține graficului funcției $f \Leftrightarrow f\left(f(1)\right) = 1$	**2p**
	$f(1) + m = 1 \Leftrightarrow 2m + 1 = 1$, deci $m = 0$	**3p**
3.	$x^2 - 1 = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 = 0$ sau $x^2 - 1 = 1$	**2p**
	$x = -\sqrt{2}$, care nu convine, sau $x = -1$, care nu convine, sau $x = 1$, care nu convine, sau $x = \sqrt{2}$, care convine	**3p**
4.	$b^2 = c - a$, unde $\overline{abc}$ sunt numerele cu proprietatea dată și, cum $c \leq 9$ și $a \geq 1$, obținem $b^2 \leq 8$, deci $b \in \{0,1,2\}$	**2p**
	Pentru $b = 0$, obținem $c = a$, deci sunt 9 numere, pentru $b = 1$, obținem $c = a + 1$, deci sunt 8 numere, iar pentru $b = 2$, obținem $c = a + 4$, deci sunt 5 numere; în total sunt 22 de numere cu proprietatea cerută	**3p**
5.	Panta dreptei AH este $m_{AH} = \frac{1}{3}$	**2p**
	H este ortocentrul ΔABC, deci $AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} \cdot m_{BC} = -1$, de unde obținem $m_{BC} = -3$	**3p**
6.	$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 2 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2$	**2p**
	$2\sin x\cos x = -1$, deci $\sin 2x = -1$ și, cum $x \in (0,\pi)$, obținem $2x = \frac{3\pi}{2}$, deci $x = \frac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0 + 0 + 1 - 0 - 1 - 0 = 0$	**3p**
b)	$\det\left(A(m)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$, pentru orice număr real m	**2p**
	Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det\left(A(m)\right) \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$	**3p**
c)	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 1 \Leftrightarrow \lvert m(m-1)\rvert = 2$, deci $m^2 - m = -2$, care nu convine, sau $m^2 - m = 2$, de unde obținem $m = -1$ sau $m = 2$, care convin	**3p**

2.a)	$x*1=2^{\ln x\cdot\ln 1}=$ $=2^{\ln x\cdot 0}=2^0=1$, pentru orice $x\in G$	**3p** **2p**
b)	$x*f=x\Leftrightarrow 2^{\ln x\cdot\ln f}=x\Leftrightarrow \ln x\cdot\ln f\cdot\ln 2=\ln x$, pentru orice $x\in G$, deci $\ln f\cdot\ln 2=1$, de unde obținem $\ln f=\frac{1}{\ln 2}$, deci $f=e^{\frac{1}{\ln 2}}\in G$	**3p**
	$e^{\frac{1}{\ln 2}}*x=2^{\ln e^{\frac{1}{\ln 2}}\cdot\ln x}=2^{\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln x}=x$, pentru orice $x\in G$, deci $f=e^{\frac{1}{\ln 2}}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$x*\frac{1}{x}=2^{\ln x\cdot\ln\frac{1}{x}}=2^{-\ln^2 x}$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$2^{-\ln^2 x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \ln^2 x=1$, de unde obținem $\ln x=-1$ sau $\ln x=1\Rightarrow x=\frac{1}{e}$ sau $x=e$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{e^x+1}{e^x+x-1}=$ $=\frac{e^x+x-1-e^x-1}{e^x+x-1}=\frac{x-2}{e^x+x-1}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+x-1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+x-1}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{1}{1+\frac{x-1}{e^x}}=\ln 1=0$, deci dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$, $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,2]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,2]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, $f(2)=2-\ln\left(e^2+1\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ și f este continuă pe $(0,+\infty)$, deci imaginea funcției f este $\left[2-\ln\left(e^2+1\right),+\infty\right)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\left(x+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\Big\|_0^1=$ $=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\ln 1=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$	**3p** **2p**
b)	$\int_{-1}^1\left\|x f(x)\right\|dx=\int_{-1}^0 -x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx+\int_0^1 x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\left(-\frac{x^2}{2}-\sqrt{x^2+1}\right)\Big\|_{-1}^0+\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{x^2+1}\right)\Big\|_0^1=$ $=0-1+\frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}-1$	**3p** **2p**
c)	Din regula lui l’Hospital, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=2$	**3p** **2p**